

شرح جامع

معادلات دیفرانسیل

«فنی و مهندسی و علوم پایه»

مولف: اصغر قربان پور



پیشگفتار مؤلف

کتاب حاضر تلاشی است در رفع نیاز جمع وسیعی از دانشجویان رشته‌های فنی‌مهندسی در آمادگی برای درس «معادلات دیفرانسیل» به منظور شرکت در آزمون‌های ورودی کارشناسی ارشد. رویکرد اصلی کتاب، رویکرد حل مسئله‌ای است. با بکار بردن منتخبی از مسائل آزمون‌های ده سال گذشته، تلاش شده است تا علاوه بر رسیدن به این مهم، درک ذهنی مناسبی از فضای حاکم بر سوالات کنکور در ذهن خواننده ایجاد شود. تعداد قابل توجه سوالات دست‌چین شده موجود در متن، انتهای بخش‌ها و انتهای فصل‌ها گواهی بر این جریان است.

خلاصه‌نویسی و جامع‌نویسی دو ویژگی اصلی هستند که در تعیین شکل کلی کتاب اثر گذار بوده‌اند. برای حصول هر چه بیشتر این دو ویژگی، پدیده‌هایی به نام «بسته» معرفی شده‌اند. این بسته‌ها، که با خطوط حاشیه‌ای از متن کتاب جدا شده‌اند، با توجه به کارکردشان به یکی از سه اسم زیر نام‌گذاری شده‌اند:

«چگونه؟» این بسته‌ها روش حل یا روند کلی مسیر حرکت در رسیدن به جواب یک مسئله را مطرح می‌کنند.
«از کجا آمده؟» این بسته‌ها به ارائه خلاصه‌ای از نحوه به دست آوردن یک فرمول یا خلاصه‌ای از اثبات یک گزاره می‌پردازند.

«یادآوری:» در این بسته‌ها به بعضی از نکات لازم مربوط به درس‌ها یا مقاطع دیگر اشاره شده است.
فهرست بسته‌ها با عناوین متناظر در ابتدای کتاب موجود آمده است که می‌تواند یادگیری و مرور مطالب خواننده شده را سرعت ببخشد. علاوه بر این بسته‌ها، نکته‌ها و توجه‌های موجود در متن کتاب، حاوی مطالب مفید و ضروری هستند. عموماً سوالاتی که بلافاصله بعد از هر یک از بسته‌ها، نکته‌ها، توجه‌ها آمده‌اند، نمونه‌هایی از کارایی موضوع مطرح شده می‌باشند.
در انتها، به رسم قدردانی، قصد تشکر از عزیزانی را دارم که در دوران تالیف و آماده‌سازی کتاب باعث دلگرمی بوده‌اند و بدون حضورشان کاری از پیش برده نمی‌شد. مدیریت انتشارات، که این فرصت ارزشمند را در اختیارم قرار دادند، و تمامی دست‌اندرکاران انتشارات در به ثمر رسیدن این مجموعه تلاش وصف‌ناپذیری داشته‌اند و بدین وسیله لطف بی‌پایانشان را ارج می‌نهم. در این میان نمی‌توانم دوستانی را فراموش کنم که به قرار همیشگی کمک‌های روحی و علمی‌شان را دریغ نکردند.
«محمد قاسمی، موسی شاه‌حسینی، علیرضا خمسه، آیدین منفرد، مهدی وظیفه‌دان، بابک شعبانی، وحید آقا کاشی، محمود وحیدی، آرمان خدابخش‌نژاد» تنها لیست کوتاهی از این سیاه‌ی پر از دوست داشتنی‌هاست.

اصغر قربان‌پور

پاییز هزار و سیصد و هشتاد و هشت

فهرست

صفحه

عنوان

فصل صفر مقدمات

۱۳	۱- تعاریف اولیه
۱۹	نمونه سوالات بخش ۱-۱
۲۱	۲- معادلات دیفرانسیل و دسته منحنی‌ها
۲۴	نمونه سوالات بخش ۲-۲
۲۶	۳- تغییر متغیر
۲۹	نمونه سوالات بخش ۳-۳
۳۱	تست‌های آخر فصل
۳۴	پاسخ تست‌های آخر فصل

فصل اول معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۴۱	۱-۱ معادلات دیفرانسیل خطی
۴۵	معادلات تبدیل شونده به خطی
۴۶	۱-۱-۱ معادلات برنولی
۵۰	۱-۱-۲ معادله ریکاتی
۵۱	نمونه سوالات بخش ۱-۱
۵۷	۱-۲ معادلات دیفرانسیل جداشدنی
۵۹	معادلات تبدیل شونده به جداشدنی
۵۹	۱-۲-۱ معادلات به فرم $y' = f(ax + by + c)$
۶۱	۱-۲-۲ معادلات همگن
۶۵	نمونه سوالات بخش ۱-۲
۷۱	۱-۳ معادلات کامل
۷۵	معادلاتی که به معادله کامل تبدیل می‌شوند
۷۵	۱-۳-۱ عامل انتگرال ساز
۸۵	نمونه سوالات انتهای بخش ۱-۳
۹۱	۱-۴ معادلاتی که بر حسب مشتق حل نمی‌شوند
۹۱	۱-۴-۱ معادلات به فرم $y = f(x, y')$
۹۴	۱-۴-۲ معادلات به فرم $x = f(y, y')$
۹۶	نمونه سوالات انتهای بخش ۱-۴
۹۸	۱-۵ قضایای وجود و یکتایی جواب
۱۰۱	تست‌های آخر فصل
۱۰۹	پاسخ تست‌های آخر فصل

فصل دوم معادلات دیفرانسیل از مرتبه بالاتر

۱۲۵	۲-۱ معادلات خطی
۱۲۶	۲-۱-۱ معادلات خطی همگن
۱۲۶	۲-۱-۱-۱ نظریه جواب‌های معادلات همگن
۱۳۲	۲-۱-۱-۲ معادلات خطی با ضرایب ثابت
۱۴۰	نمونه سوالات بخش ۲-۱-۱
۱۵۰	۲-۱-۲ معادلات خطی ناهمگن
۱۵۰	۲-۱-۲-۱ نظریه جواب‌های معادلات ناهمگن
۱۵۱	۲-۱-۲-۲ روش ضرایب نامعین
۱۵۵	۲-۱-۲-۳ روش تغییر پارامترها
۱۵۷	نمونه سوالات ۲-۱-۲
۱۶۴	۲-۱-۳ معادلات اویلر (معادلات تبدیل شونده به خطی با ضرایب ثابت)
۱۷۳	نمونه سوالات بخش ۲-۱-۳
۱۷۹	۲-۲ معادلات غیرخطی
۱۷۹	۲-۲-۱ معادلات بدون حضور متغیر وابسته
۱۸۱	۲-۲-۲ معادلات بدون حضور متغیر مستقل
۱۸۳	نمونه سوالات بخش ۲-۲
۱۸۶	تست‌های آخر فصل
۱۹۸	پاسخ تست‌های آخر فصل

فصل سوم: حل معادلات با استفاده از سری‌ها

۲۱۷	۳-۱ مروری بر توابع تحلیلی
۲۱۸	۳-۲ سری‌های جواب در یک نقطه عادی
۲۲۶	۳-۲-۱ معادلات لژاندر
۲۲۸	نمونه سئوالات بخش ۳-۲
۲۳۴	۳-۳ سری جواب در نقاط تکین منظم
۲۴۲	نمونه سوالات بخش ۳-۳
۲۵۰	۳-۴ معادلات بسل:
۲۵۳	۴-۳-۱ خواص توابع بسل
۲۵۶	۳-۴-۲ معادلات بسل اصلاح شده
۲۵۹	نمونه سوالات بخش ۳-۴
۲۶۳	تست‌های آخر فصل
۲۷۰	پاسخ تست‌های آخر فصل

فصل چهارم دستگاه معادلات خطی مرتبه اول

۲۸۴	۴-۱ حل دستگاه معادلات خطی مرتبه اول با ضرایب ثابت به روش حذفی و روش اپراتوری
۲۹۱	نمونه سوالات بخش ۴-۱
۲۹۴	۴-۲ حل دستگاه معادلات خطی همگن با روش مقادیر ویژه
۳۰۰	نمونه سوالات بخش ۴-۲

عنوان

صفحه

تست های آخر فصل	۳۰۳
پاسخ تست های آخر فصل	۳۰۷

فصل پنجم لاپلاس و کاربردهای آن

۵-۱ تعریف تبدیل لاپلاس	۳۱۳
۵-۲ تبدیل لاپلاس بعضی از توابع	۳۱۷
۵-۲-۱ تبدیل لاپلاس توابع مقدماتی	۳۱۷
۵-۲-۲ تابع هویساید و لاپلاس توابع چند ضابطه ای (و متناوب)	۳۱۹
۵-۲-۳ تابع دلتای دیراک	۳۲۱
نمونه سوالات بخش ۵-۲	۳۲۳
۵-۳ خواص تبدیل لاپلاس	۳۲۵
نمونه سوالات بخش ۵-۳	۳۳۵
۵-۴ تبدیل وارون لاپلاس	۳۴۲
نمونه سوالات بخش ۵-۴	۳۴۹
۵-۵ کاربردهای لاپلاس	۳۵۵
۵-۵-۱ حل معادلات دیفرانسیل	۳۵۵
۵-۵-۲ حل انتگرال های ناسره	۳۵۹
نمونه سوالات بخش ۵-۵	۳۶۱
تست های آخر فصل	۳۶۷
پاسخ تست های آخر فصل	۳۷۵

فهرست بسته‌ها

عنوان

صفحه

فصل صفر: مقدمات

- یادآوری: قضیه اول حساب دیفرانسیل: قضیه دوم حساب دیفرانسیل ۱۷
- چگونه؟ چگونه معادلات دیفرانسیل مربوط به یک دسته منحنی را پیدا می‌کنیم؟ ۲۱
- چگونه؟ چگونه معادله دیفرانسیل مسیره‌های قائم یک دسته منحنی را پیدا کنیم؟ (مختصات دکارتی) ۲۲
- از کجا آمده؟ چرا برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل دسته منحنی متعامد به جای y' ، $\frac{-1}{y'}$ قرار می‌دهیم؟ ۲۲
- یادآوری: قاعده زنجیری، قاعده ضرب ۲۶

فصل اول معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

- چگونه؟ چگونه جواب عمومی یک معادله خطی از مرتبه یک را بدست بیاوریم؟ ۴۱
- از کجا آمده؟ جواب معادله خطی مرتبه اول از کجا آمده است؟ ۴۲
- چگونه؟ چگونه معادلات برنولی را حل کنیم؟ ۴۶
- از کجا آمده؟ تغییرمتغیر معادله‌ی برنولی از کجا آمده است؟ ۴۶
- چگونه؟ چگونه معادله ریکاتی را حل کنیم؟ ۵۰
- چگونه؟ چگونه معادله $y' = f(ax + by + c)$ را به معادله‌ای جداشدنی تبدیل کنیم؟ ۵۹
- چگونه؟ چگونه یک معادله همگن را به معادله جداشدنی تبدیل کنیم؟ ۶۱
- از کجا آمده؟ تغییر متغیر $y = vx$ از کجا آمده است و چگونه عمل می‌کند؟ ۶۱
- چگونه؟ چگونه می‌توان معادله به فرم $y' = \frac{ax + bx + c}{a'x + b'x + c'}$ را وقتی $ab' - a'b \neq 0$ به یک معادله همگن تبدیل کرد؟ ۶۳
- چگونه؟ چگونه جواب عمومی یک معادله کامل را بدست آوریم؟ ۷۲
- از کجا آمده؟ فرمول‌های عامل‌های انتگرال ساز $(I = \frac{M_y - N_x}{z_x N - z_y N})$ و $(\mu(z) = e^{\int I(z) dz})$ از کجا بدست آمده‌اند؟ ۷۷
- چگونه؟ چگونه از جوابی به فرم $u(x, y) = c$ یک عامل انتگرال‌ساز پیدا کنیم؟ ۸۱
- چگونه؟ چگونه می‌توان با استفاده از یک عامل انتگرال‌ساز، عامل‌های انتگرال‌ساز دیگر ساخت؟ ۸۱
- چگونه؟ چگونه جواب عمومی معادلاتی که عامل انتگرال‌ساز دارند را بدست آوریم؟ ۸۲
- چگونه؟ چگونه تمام جواب‌های یک معادله کلرو را بدست آوریم؟ ۹۲
- چگونه؟ چگونه معادلات به فرم $y = f(x, y')$ را حل کنیم؟ ۹۴

فصل دوم: معادلات دیفرانسیل از مرتبه بالاتر

- از کجا آمده؟ فرمول (روش کاهیدن) از کجا بدست می‌آید؟ ۱۳۰
- از کجا آمده؟ چندجمله‌ای مشخصه از کجا آمده است؟ ۱۳۲
- چگونه؟ (خلاصه) چگونه جواب عمومی یک معادله همگن با ضرایب ثابت را بدست آوریم؟ ۱۳۹

عنوان

صفحه

- چگونه؟ چگونه جواب عمومی معادله ناهمگن را پیدا کنیم؟ ۱۵۱
- چگونه؟ جواب خصوصی با ضرایب نامعین چگونه بدست می‌آید؟ ۱۵۱
- چگونه؟ روش تغییر پارامتر چگونه کار می‌کند؟ ۱۵۵
- چگونه؟ چگونه یک معادله اویلر را حل کنیم؟ ۱۶۴
- از کجا آمده؟ فرمول‌های جواب معادله اویلر از کجا آمده‌اند؟ ۱۶۷
- چگونه؟ چگونه معادلات اویلر از مرتبه بالاتر به معادله خطی با ضرایب ثابت تبدیل می‌شوند؟ ۱۷۱
- چگونه؟ چگونه معادلات بدون حضور متغیر وابسته را حل کنیم؟ ۱۷۹
- چگونه؟ چگونه معادلات بدون حضور متغیر مستقل را حل کنیم؟ ۱۸۱

فصل سوم: حل معادلات با استفاده از سری‌ها

- چگونه؟ چگونه سری جواب را در نقطه عادی بیابیم؟ ۲۱۹
- یادآوری دستکاری متغیر اندیس یک سری ۲۲۲
- چگونه؟ چگونه می‌توان ضرایب جملات سری جواب یک مسئله با مقادیر اولیه را پیدا کرد؟ ۲۲۲
- چگونه؟ چگونه شعاع همگرایی سری جواب در نقطه عادی $x = x_0$ و را پیدا کنیم؟ ۲۲۴
- چگونه؟ سری‌های جواب معادله در یک نقطه تکین منظم چگونه به دست می‌آید؟ ۲۳۷
- چگونه؟ شعاع همگرایی سری فروبینیوسی جواب در یک نقطه تکین منظم چگونه به دست می‌آید؟ ۲۴۱
- چگونه؟ جواب‌های معادله بسل از مرتبه ν چگونه به دست می‌آیند؟ ۲۵۱
- چگونه؟ چگونه معادله $x^2 y'' + (2k+1)xy' + ((\alpha x)^{2l} - \beta^2)y = 0$ را به معادله بسل تبدیل کنیم؟ ۲۵۱
- از کجا آمده؟ تغییرمتغیر (تبدیل‌کننده به معادلات بسل) از کجا آمده است؟ ۲۵۳

فصل چهارم دستگاه معادلات خطی مرتبه اول

- چگونه؟ چگونه روش حذفی را به کار ببریم؟ ۲۸۴
- چگونه؟ روش اپراتوری چگونه است؟ ۲۸۷
- از کجا آمده؟ فرمول روش اپراتوری از کجا آمده است؟ ۲۸۸
- چگونه؟ تعداد پارامترهای آزاد ظاهر شده در جواب عمومی دستگاه معادلات را چگونه می‌توان به دست آورد؟ ۲۹۰
- یادآوری: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌ها را چگونه پیدا می‌کنیم؟ ۲۹۴
- چگونه؟ اگر γ مقدار ویژه ماتریس P باشد که درجه تکرار آن یک است، جواب متناظر با این مقدار ویژه چگونه به دست می‌آید؟ ۲۹۵
- چگونه؟ جواب‌های مستقل خطی مربوط به مقادیر ویژه مختلط چگونه بدست می‌آید؟ ۲۹۷
- چگونه؟ جواب‌های مستقل خطی به مقدار ویژه مضاعف (حقیقی) چگونه بدست می‌آید؟ ۲۹۸

فصل پنجم لاپلاس و کاربردهای آن

- از کجا آمده؟ شرط رشد نمایی تابع از کجا آمده است؟ ۳۱۵
- یادآوری: یادآوری تابع گاما ۳۱۸
- چگونه؟ چگونه یک تابع چند ضابطه ای را می‌توان به صورت ترکیب توابع هویساید نوشت؟ ۳۱۹
- چگونه؟ چگونه لاپلاس جواب یک معادله (خطی با ضرایب ثابت) با شرایط اولیه از مرتبه را پیدا کنید؟ ۳۲۵
- از کجا آمده؟ فرمول $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty L\{f(t)\}(z) dz - \lim_{x \rightarrow \infty} L\{f(t)\}(x)$ از کجا آمده؟ ۳۲۹
- از کجا آمده؟ خواص لاپلاس؟ ۳۳۴
- چگونه؟ چگونه تبدیل وارون یک تابع گویا را پیدا کنیم؟ ۳۴۳
- چگونه؟ چگونه از لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل استفاده کنیم؟ ۳۵۵